6 Mitme muutuja funktsioonid

Reaalarvude järjestatud paaride (x, y) hulga ja tasandi punktide hulga vahel on üksühene vastavus, st igale paarile vastab üks kindel punkt tasandil ja igale tasandi punktile vastavad selle koordinaadid ehk üks reaalarvude järjestatud paar. Piirkonnaks nimetatakse (x, y)-tasandi punktide alamhulka. Tasandilisi piirkondi hakkame tähistama sümboliga D. Näiteks piirkond

$$D = \{(x, y)|\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

on tasandi niisuguste punktide hulk, mis asuvad koorinaatide alguspunktist mitte kaugemal kui üks ühik ehk ühikulise raadiusega ring koos seda ümbritseva ringjoonega.

Piirkonda piiravat joont nimetatakse piirkonna rajajooneks ja rajajoone punkte piirkonna rajapunktideks. Rajajoonel mitte asuvaid punkte nimetatakse piirkonna sisepuntideks.

Piirkonda nimetatakse kinniseks, kui see sisaldab kõiki oma rajapunkte, st sisaldab rajajoont.

Piirkonda nimetatakse lahtiseks, kui see ei sisalda ühtegi rajapunkti.

Edaspidi kujutame joonistel kinnise piirkonna rajajoont pideva joonega ja lahtise piirkonna rajajoont katkendliku joonega.

Joonis 6.1. Kinnine ja lahtine ring

Punkti ümbruseks tasandil nimetatakse suvalise raadiusega lahtist ringi, mille keskpunktiks on punkt ise. Kui $\varepsilon > 0$ on suvaline reaalarv, siis punkti (x_0, y_0) ε-ümbruseks on lahtine ring

$$U_\varepsilon(x_0, y_0) = \{(x, y)|\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Reaalarvude kolmikute (x, y, z) ja ruumi punktide hulga vahel on korraldatav üksühene vastavus. Ruumiliseks piirkonnaks on kogu ruumi alamhulk.

Ruumilist piirkonna eraldab kogu ruumist mingisugune pind, mida nimetatakse piirkonna rajapinnaks ehk rajaks. Rajapinna punkte nimetatakse piirkonna rajapunktideks ja rajapinnal mittte asuvaid punkte piirkonna sisepunktideks.

Kui piirkond sisaldab kõiki oma rajapunkte, nimetatakse piirkonda kinniseks.

Kui piirkond ei sisalda ühtegi oma rajapunkti, nimetatakse piirkonda lahtiseks.

Seega, kinnine piirkond on piirkond koos seda ümbritseva rajapinnaga, lahtine piirkond on piirkond ilma seda ümbritseva rajapinnata.

Ruumi punkti (x_0, y_0, z_0) ε-ümbruseks nimetatakse lahtist kera

$$U_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z)|\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\},$$

st kera keskpunktiga (x_0, y_0, z_0) ja raadiusega ε.

6.1 Kahe muutuja funktsiooni mõiste

Olgu D tasandiline piirkond, mis võib olla ka kogu xy-tasand.

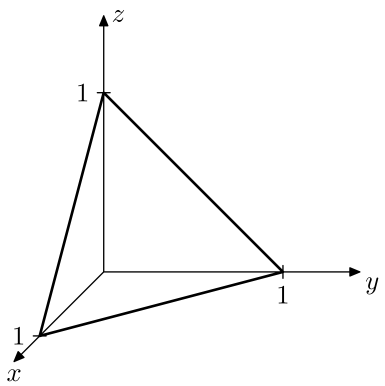
Definitsioon 1. Kui igale $(x, y) \in D$ on vastavusse seatud muutuja z kindel väärtus, siis muutujat z nimetatakse kahe muutuja x ja y funktsiooniks ja tähistatakse

$$z = f(x, y).$$

Veel on kasutusel tähistused $z = g(x, y)$, $z = F(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$ või $z = z(x, y)$.

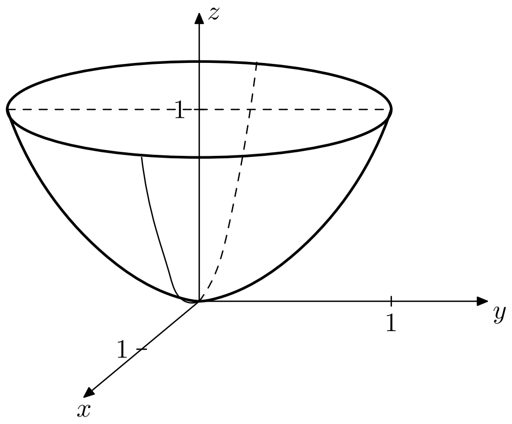
Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikule kuulub ruumiline punkt koordinaatidega $(x, y, f(x, y))$. Kõikide niisuguste punktide hulk moodustab ruumis pinna. Seega on kahe muutuja funktsiooni graafikuks pind ruumis.

Näide 1. Kahe muutuja funktsiooni $z = 1 - x - y$ graafikuks on tasand, milles joonisel 6.2 on kujutatud esimesse oktanti jääv osa.



Joonis 6.2. Funktsiooni $z = 1 - x - y$ graafikust I oktanti jääv osa

Näide 2. Kahe muutuja funktsiooni $z = x^2 + y^2$ graafikuks on pöördparaboloid, mis tekib parabooli $z = y^2$ pöörlemisel ümber z-telje.



Joonis 6.3. Pöördparaboloid

Kui kahe muutuja funktsioon ei ole ühene, kasutatakse selle esitamiseks ilmutamata kuju.

Näide 3. Ilmutamata kujul esitatud kahe muutuja funktsiooni $x^2+y^2+z^2=r^2$ graafikuks on sfäär keskpunktiga koordinaatide alguses ja raadiusega r. Kui avaldada sellest võrdusest muutuja z, saame kaks ühest kahe muutuja funktsiooni $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ ja $z=-\sqrt{r^2-x^2-y^2}$. Nendest esimese graafikuks on sfääri ülemine pool ja teisel alumine pool.

Definitsioon 2. Kahe muutuja funktsiooni $z=f(x,y)$ määramispiirkonnaks nimetatakse niisugust järjestatud paaride (x,y) (tasandi punktide) hulka, millele antud eeskirja kohaselt on võimalik vastavusse seada muutuja z väärtust.

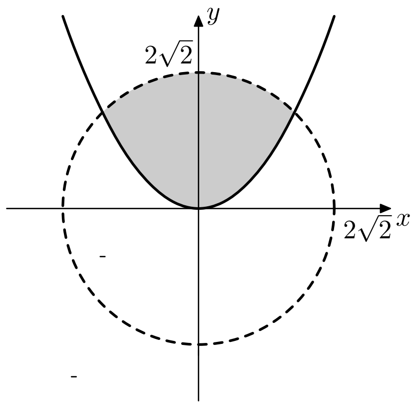
Näide 4. Leiame funktsiooni $z=\ln(8-x^2-y^2)+\sqrt{2y-x^2}$ määramispiirkonna ja kujutame selle xy-tasandil

Funktsioon on määratud, kui on täidetud tingimused

$$\begin{cases} 8-x^2-y^2>0 \\ 2y-x^2\geq 0. \end{cases}$$

Esimesest tingimusest $x^2+y^2<8$ ja teiset $y\geq\frac{x^2}{2}$. Esimest tingimust rahuldavad xy-tasandi punktid mis kuuluvad ringi keskpunktiga koordinaatide alguses ja raadiusega $2\sqrt{2}$. Et tingimuses võrdust 8-ga pole, siis ringi ümbritsev ringjoon hulka ei kuulu ja joonisel kujutame ringjoone katkendliku joonega.

Teist tingimust rahuldavad xy-tasandi punktid, mis jäävad paraboolist $y=\frac{x^2}{2}$ kõrgemale. Antud tingimuses on võrdus lubatud, seega parabool kuulub hulka ja joonisel kujutame selle pideva joonega.

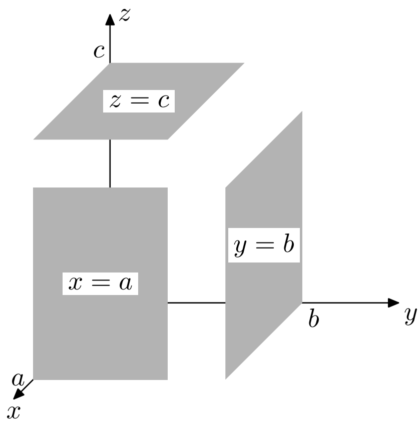


Joonis 6.4. Funktsiooni $z = \ln(8 - x^2 - y^2) + \sqrt{2y - x^2}$ mnääramispiirkond

6.2 Kahe muutuja funktsiooni graafiku tasandilõiked ja nivoojooned

Kahe muutuja funktsiooni graafiku joonestamisel on abiks selle lõiked tasanditega, mis on risti ühega kolmest koordinaatteljest (st paralleelne ühega koordinaattasanditest). Koordinaattasandite võrrandid on järgmised. yz-tasandi võrrand on $x = 0$, xz-tasandi võrrand on $y = 0$ ja xy-tasandi võrrand $z = 0$.

Tasand $x = a$ on x-teljega risti, st yz-tasandiga paralleelne. Tasand $y = b$ on y-teljega risti ehk xz-tasandiga paralleelne. Tasand $z = c$ on z-teljega risti ehk xy-tasandiga paralleelne.



Joonis 6.5. Tasandid $x = a$, $y = b$ ja $z = c$

Pinna $z = f(x, y)$ tasandilõigeteks tasanditega $x = a$ erinevate a väärtuste korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = a, \end{cases}$$

pinna $z = f(x; y)$ tasandilõigeteks tasanditega $y = b$ erinevate b väärtuste korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = b \end{cases}$$

ja pinna $z = f(x; y)$ tasandilõigeteks tasanditega $z = c$ erinevate c väärtuste korral nimetatakse jooni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = c, \end{cases}$$

Viimaseid jooni nimetatakse ka pinna $z = f(x, y)$ *nivoojoonteks.*

Näide 1. Joonestame pinna $x^2+y^2-z^2 = 0$, kasutades selleks nivoojooni, mis tekivad pinna lõikamisel tasanditega $z = 0$, $z = \pm 1$ ja $z = \pm 2$ ning lõiget tasandiga $x = 0$.

Lõigates pinda tasandiga xy-tasandiga $z = 0$, saame lõikejooneks $x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$ ehk koordinaatide alguspunkti, sest $x^2 + y^2 = 0$ ainult juhul, kui $x = 0$ ja $y = 0$.

Lõigates pinda tasandiga tasandiga $z = 1$, saame lõikejooneks $x^2+y^2 = 1$, $z = 1$ ehk ringjoone raadiusega 1, mis asub tasandil $z = 1$ keskpunktiga z-teljel.

Lõigates pinda tasandiga tasandiga $z = -1$, saame lõikejooneks $x^2+y^2 = 1$, $z = -1$ ehk ringjoone raadiusega 1, mis asub tasandil $z = -1$ keskpunktiga z-teljel.

Lõigates pinda tasandiga tasandiga $z = 2$, saame lõikejooneks $x^2+y^2 = 4$, $z = 2$ ehk ringjoone raadiusega 2, mis asub tasandil $z = 2$ keskpunktiga z-teljel.

Lõigates pinda tasandiga tasandiga $z = -2$, saame lõikejooneks $x^2+y^2 = 4$, $z = -2$ ehk ringjoone raadiusega 2, mis asub tasandil $z = -2$ keskpunktiga z-teljel. Joonestame need nivoojooned ruumilisse teljestikku (joonis 6.6).

Kui lõigata pinda tasandiga $x = 0$, saame lõikejooneks $z^2 = y^2$, $x = 0$ ehk kaks ristuvat sirget $z = y$ ja $z = -y$, mis asuvad yz-tasandil. Kui lisada need sirged teljestikku, on ilmne, et vaadeldav pind on koonus, mille tipp asub koordinaaatide alguspunktis.

Funktsiooni $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ teisendamisel ilmutatud kujule saame kaks ühest haru $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, mille graafikuteks on vastavalt koonuse ülemine ja koonuse alumine pool.

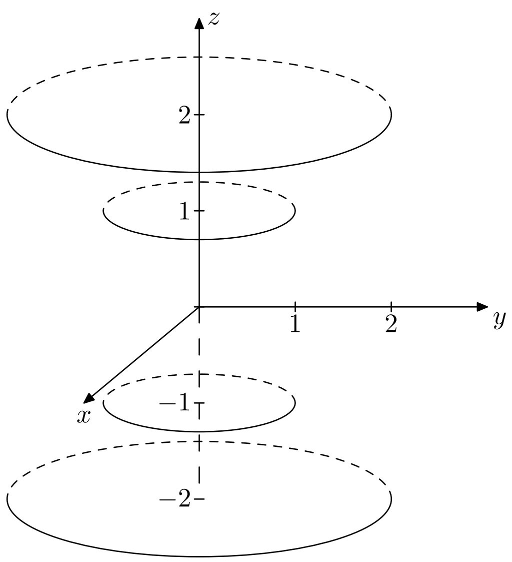
Näide 2. Joonestame pinna $z = x^2 - y^2$, kasutades selleks lõikeid tasanditega $y = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 0,5$ ja $x = 0$ ning nivoojooni, mis tekib pinna lõikamisel tasanditega $z = 0$ ja $z = -0,44$.

Teljestiku joonestame seekord ebaharilikult, võttes paberi tasadi xz-tasandiks ja suunates y-telje tahapoole.

Lõikeks tasandiga $y = 0$ on parabool $z = x^2$, $y = 0$.

Lõigeteks tasanditega $x = \pm 1$ on paraboolid $z = 1 - y^2$, $x = 1$ ja $z = 1 - y^2$, $x = -1$.

Lõigeteks tasanditega $x = \pm 0,5$ on paraboolid $z = 0,25 - y^2$, $x = 0,5$ ja $z = 0,25 - y^2$, $x = -0,5$.



Joonis 6.6. Pinna $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ nivoojooned

Lõikejooneks tasandiga $z = 0$ on kaks ristuvat sirget $y = x$ ja $y = -x$ xy-tasandil.

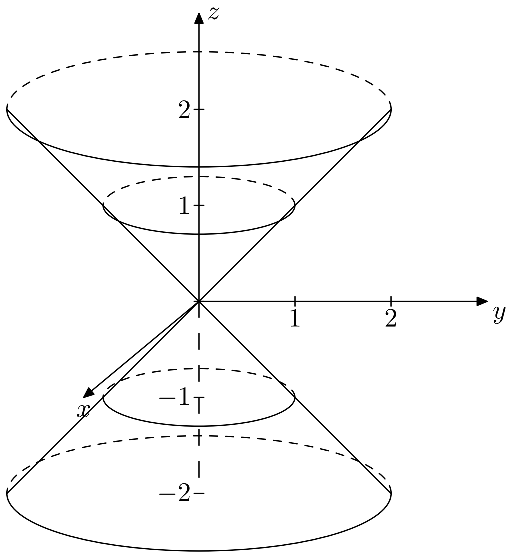
Lõikejooneks tasandiga $z = -0,44$ on võrdhaarne hüperbool $y^2 - x^2 = 0,44$, mille reaalteljeks on y-telg.

Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ graafiku *nivoopindadeks* nimetatakse pindu

$$\begin{cases} w = f(x, y, z) \\ w = c. \end{cases}$$

Võrrandisüsteemist saame, et $f(x, y, z) = c$, st ilmutamata kujul kahe muutuja funktsiooni, mille graafikuks on pind ruumis.

Näide 3. Kolme muutuja funktsiooni $w = x^2 + y^2 + z^2$ nivoopindadeks on pinnad $x^2 + y^2 + z^2 = c$, kus $c > 0$. Nendeks pindadeks on sfäärid keskpunktiga koordinaatide alguses, raadiusega $\sqrt{c}$.



Joonis 6.7. Koonus

6.3 Funktsiooni osamuut ja täismuut

Fikseerime kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas D ühe punkti $M(x, y)$.

Jättes muutuja y konstantseks, muudame sõltumatut muutujat x suuruse Δx võrra. Funktsiooni osamuuduks x järgi nimetatakse vahet

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \tag{6.1}$$

Jättes muutuja x konstantseks, muudame sõltumatut muutujat y suuruse Δy võrra. Funktsiooni osamuuduks y järgi nimetatakse vahet

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{6.2}$$

Muutes argumenti x suuruse Δx ja argumenti y suuruse Δy võrra, liigume xy-tasandi punktist $M(x, y)$ punkti $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Funktsiooni täismuuduks nimetatakse vahet

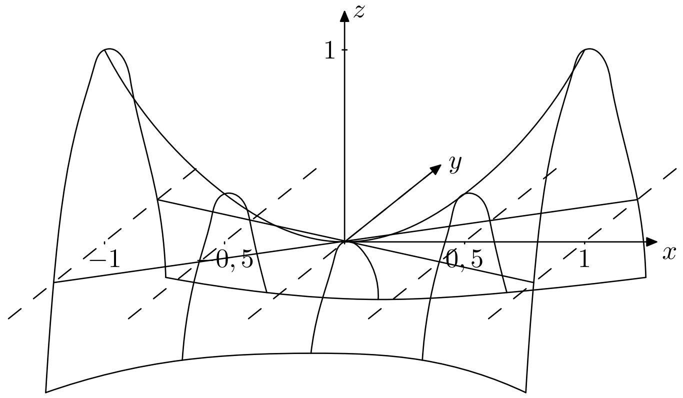
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{6.3}$$

Üldjuhul funktktsiooni osamuutude summa ei võrdu täismuuduga, st $\Delta z \neq \Delta x + \Delta y$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = xy$ osamuutude summa ja täissmuudu, kui $x = 2$, $y = 3$, $\Delta x = 0,2$ ja $\Delta y = 0,1$.

Osamuut x järgi $\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x = 3 \cdot 0,2 = 0,6$.

Osamuut y järgi $\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y = 2 \cdot 0,1 = 0,2$. Seega $\Delta_x z + \Delta_y z = 0,8$.



Joonis 6.8. Hüperboolne paraboloid ehk sadulpind

Täismuut $\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y = 2\cdot 0,1 + 3\cdot 0,2 + 0,2\cdot 0,1 = 0,82$.

Samasugusel viisil defineeritakse kolme muutuja funktsiooni $w = f(x,y,z)$ osamuudud sõltumatute muutujate x, y ja z järgi ning täismuut.

$$\begin{aligned}
\Delta_x w &= f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z),\\
\Delta_y w &= f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z),\\
\Delta_z w &= f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z),\\
\Delta w &= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z).
\end{aligned}$$

6.4 Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Kahe muutuja funktsiooni korral on piirprotsessiks punkti $P(x,y)$ lähenemine punktile $P_0(x_0,y_0)$, mida märgitakse $(x,y)\to(x_0,y_0)$ või $x\to x_0$, $y\to y_0$.

Punkt P võib punktile P_0 läheneda mööda suvalist trajektoori: mööda sirget, murdjoont, parabooli kaart jne. Sõltumata lähenemise trajektoorist jõuab punkt P igasse P_0 ümbrusse $U_\delta(x_0,y_0)$ olgu $\delta > 0$ kui tahes väike.

Definitsioon 1. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ piirväärtuseks piirprotsessis $(x,y)\to(x_0,y_0)$, kui $\forall\ \varepsilon > 0$ korral leidub selline ümbrus $U_\delta(x_0,y_0)$, et niipea kui $(x,y)\in U_\delta(x_0,y_0)$, on

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Teiste sõnadega, reaalarv A on funktsiooni $f(x,y)$ piirväärtuseks piirprotsessis $(x,y)\to(x_0,y_0)$, kui funktsiooni väärtus $f(x,y)$ on reaalarvule A kui tahes lähedal, võttes punkti $P(x,y)$ punktile $P_0(x_0,y_0)$ piisavalt lähedal.

Seda tähistatakse

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $f(x,y)$ nimetatakse pidevaks punktis $P_0(x_0,y_0)$, kui

1. $\exists f(x_0,y_0)$,
2. $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$,
3. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Definitsioon 3. Funktsiooni nimetatakse pidevaks piirkonnas D, kui funktsioon on pidev selle piirkonna igas punktis.

Tähistades $x = x_0 + \Delta x$ ja $y = y_0 + \Delta y$, saame, et $x \to x_0$ ja $y \to y_0$ parajasti siis, kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$. Pidevuse 3. tingimuse saame nüüd kirjutada

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

ehk

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0. \tag{6.4}$$

Tähistame $\Delta\varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Siis

$$\Delta\varrho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0 \texttt{ ja } \Delta y \to 0.$$

Tigimusest (6.4) saame kahe muutuja pidevuseks punktis $P_0(x_0,y_0)$ tarviliku ja piisava tingimuse

$$\lim_{\Delta\varrho \to 0} \Delta z = 0. \tag{6.5}$$

Näide 1. Arvutame piirväärtuse $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Tähistades $\varrho^2 = x^2 + y^2$, on ilmne, et $x \to 0$ ja $y \to 0 \Leftrightarrow$ kui $\varrho^2 \to 0$ ning

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\varrho^2 \to 0} \frac{\sin \varrho^2}{\varrho^2} = 1.$$

Näide 2. Näitame, et funktisoonil $f(x,y) = \dfrac{2x - 3y}{x + y}$ puudub piirväärtus piirprotsessis $(x,y) \to (0;0)$.

Vaatleme kahte erinevat lähenemisviisi punktile $(0;0)$, lähtudes suvalisest punktist (x,y). Esimese lähenemisviisi korral jätame kõigepealt muutuja y konstantseks ja leiame funktsioonist piirväärtuse, kui $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-3y}{x+y} = -\frac{3y}{y} = -3$$

ning seejärel leiame tuemusest piirväärtuse piirprotsessis $y \to 0$

$$\lim_{y\to 0}(-3) = -3.$$

Seega

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{2x-3y}{x+y} = -3.$$

Teise lähenemisviisi korral jätame kõigepealt muutuja x konstantseks ja leiame funktsiooni piirväärtuse piirprotsessis $y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{2x-3y}{x+y} = \frac{2x}{x} = 2$$

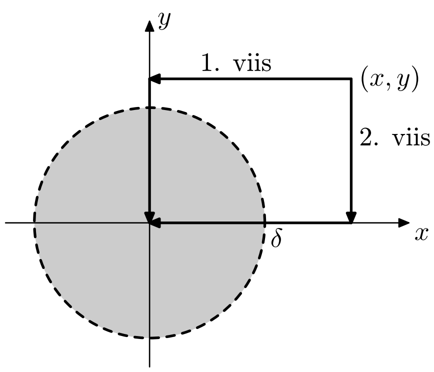
ning tulemusest piirväärtuse piirprotsessis $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} 2 = 2.$$

Seega

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{2x-3y}{x+y} = 2.$$

Et aga mõlema lähenemisviisi korral me mingil hetkel siseneme punkti $(0;0)$ igasse ümbrusse $U_\delta(0;0)$, olgu $\delta > 0$ kui tahes väike, siis piirväärtuse definitsioonis esitatud tingimus ei ole täidetud.



Joonis 6.9. Kaks lähenemisviisi punktile (0;0) ja punkti (0;0) ümbrus $U_\delta(0;0)$

6.5 Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Fikseerime kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas ühe punkti $P(x, y)$. Jättes muutuja y konstantseks, muudame muutujat x suuruse Δx võrra ja leiame funktsiooni osamuudu x järgi $\Delta_x z$.

Definitsioon 1. Piirväärtust

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{6.6}$$

nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ osatuletiseks x järgi.

Osatuletist x järgi tähistatakse veel z'_x, $f'_x(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Jättes muutuja x konstantseks, muudame muutujat y suuruse Δy võrra ja leiame funktsiooni osamuudu y järgi $\Delta_y z$.

Definitsioon 1. Piirväärtust

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{6.7}$$

nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ osatuletiseks y järgi.

Osatuletist y järgi tähistatakse veel z'_y, $f'_y(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Kahe muutja funktsiooni osatuletise leidmisel x järgi on muutuja y loetud konstsntseks. Ainaks muutujaks selles definitsioonis on Δx. Samuti on osatuletise leidmisel y järgi loetud konstantseks muutuja x ja ainsaks muutujaks definitsioonis on Δy. Järelikult jäävad osatuletiste leidmisel kehtima kõik ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise reeglid, millele lisandub reegel, et *muutujat mille järgi osatuletist ei leita, vaadeldakse konstandina.*

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^3y - x^2y^2$ osatuletised mõlema muutuja järgi.

Osatuletise leidmisel x järgi on muutuja y konstantne, seega diferentseerimisreeglite põhjal

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = y\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - y^2\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = y \cdot 3x^2 - y^2 \cdot 2x = 3x^2y - 2xy^2.$$

Osatuletise leidmisel y järgi on x konstantne. Diferentseerimisreeglite abil

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2) = x^3\frac{\partial}{\partial y}(y) - x^2\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = x^3 - x^2 \cdot 2y = x^3y - 2x^2y.$$

Kehtima jääb ka liitfunktsiooni diferentseerimise reegel.

Näide 2. Leiame funktsiooni $z = \arctan \dfrac{x}{y}$ osatuletised mõlema muutuja järgi.

Osatuletis x järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial x}(x) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Osatuletis y järgi

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)\\ &= \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ osatuletised muutujate x, y ja z järgi defineeritakse vastavalt

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y w}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

ja

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

Osatuletiste leidmisel kehtib sama reegel, mis kahe muutuja funktsiooni osatuletiste leidmisel: kõiki muutujaid, va. muutjat, mille järgi osatuletist leitakse, vaadeldakse konstantidena.

Näide 3. Leiame funktsiooni $w = x^{y^z}$ osatuletised kõigi muutujate järgi. Osatuletise leidmisel muutja x järgi on meil tegemist astmefunktsiooniga konstantse astendajaga y^z, seega

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}.$$

Osatuletise leidmisel muutuja y järgi on tegemist eksponentfunktsiooniga, mille alus on x ja astendajaks astmefunktsioon y^z, seega

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1}.$$

Osatuletise leidmisel muutja z järgi on antud funktsioon eksponentfunktsioon alusega x. Astendaja y^z on samuti eksponentfunktsioon alusega y. Seega

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y.$$

6.6 Täismuut ja täisdiferentsiaal

Oletame, et kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ on pidev ja omab pidevaid osatuletisi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ning $\frac{\partial z}{\partial y}$ punktis $P(x, y)$ ja selle mingis ümbruses. Esitame funktsiooni täismuudu

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Esimeses kahes liikmes on y muutumatu suurus, võrdne $y + \Delta y$. Kolmandas ja neljandas liikmes on x konstantne.

Punktis P ja selle ümbruses on täidetud Lagrange'i teoreemi eeldused. Järelikult leidub selline $\overline{x} \in (x, x + \Delta x)$, et

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x.$$

Teiseks leidub selline $\overline{y} \in (y, y + \Delta y)$, et

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y} \Delta y.$$

Osatuletiste pidevuse tõttu

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

ja

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Teoreemist lõpmatult kahanevate suuruste kohta saame, et

$$\frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \alpha$$

ja

$$\frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \beta,$$

kus α ja β on piirprotsessis $(\Delta x, \Delta y) \to (0; 0)$ lõpmatult kahanevad suurused.

Funtksiooni täismuudu jaoks saame avaldise

$$\Delta z = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \alpha \right) \Delta x + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \beta \right) \Delta y$$

ehk

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y. \tag{6.8}$$

Punktis 6.4 võtsime kasutusels tähistuse $\Delta \varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Tingimuste

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta \varrho} \right| \leq 1$$

ja

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta \varrho} \right| \leq 1$$

põhjal on need tõkestatud suurused. Seega $\alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta\varrho}$ ja $\beta\dfrac{\Delta y}{\Delta\varrho}$ on lõpmatult kahanevad suurused kui lõpmatult kahanevate ja tõkestatud suuruste korrutised. Piirväärtus

$$\lim_{\Delta\varrho\to 0}\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\Delta\varrho}=\lim_{\Delta\varrho\to 0}\alpha\frac{\Delta x}{\Delta\varrho}+\lim_{\Delta\varrho\to 0}\beta\frac{\Delta y}{\Delta\varrho}=0,$$

st $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ on $\Delta\varrho$ suhtes (Δx ja Δy suhtes) kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus.

Definitsioon. Kui täismuudu avaldises (6.8) esimene summa on Δx ja Δy suhtes lineaarne ja teine summa samade muutujate suhtes kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, siis lineaarset osa nimetatakse kahe muutja funktsiooni $z=f(x,y)$ täisdiferentsiaaliks.

Täisdiferentsiaali tähistatakse dz. Seega definitsiooni kohaselt

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Funktsiooni $z=x$ korral $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ ja $dz=dx=\Delta x$.

Funktsiooni $z=y$ korral $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ ja $dz=dy=\Delta y$.

Järelikult sõltumatute muutujate x ja y jaoks langevad diferentaiaali ja muudu mõisted kokku ning täisdiferentsiaal

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{6.9}$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $z=\arctan\dfrac{x}{y}$ täisdiferentsiaali avaldise.

Kasutades punkti 6.5 näites 2 leitud osatuletisi, saame

$$dz=\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}.$$

Näide 2. Arvutame funktsiooni $z=\sqrt{x^2+y^2}$ täismuudu ja täisdiferentsiaali väärtuse, kui $x=3$, $y=4$, $\Delta x=0,2$ ja $\Delta y=0,1$.

Täismuudu valemi (6.3) abil

$$\Delta z=\sqrt{3,2^2+4,1^2}-\sqrt{3^2+4^4}=\sqrt{27,05}-\sqrt{25}=0,20096.$$

Täisdiferentsiaali arvutamiseks leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Siis

$$dz = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot 0,2 + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot 0,1 = \frac{0,6}{5} + \frac{0,4}{5} = 0,2.$$

Tehtud arvutustest nähtub, et täismuut ja täisdiferentsiaal erinevad vähem kui $0,001$ võrra, st suuruse võrra, mis on kaks suurusjärku väiksem kui Δx ja Δy.

Seda asjaolu arvestades saab täisdiferentsiaali kasutada kahe muutuja funktsiooni väärtuste ligikaudsel arvutamisel. Kui Δx ja Δy on piisavalt väikesed, siis Δz ja dz erinevad teineteisest suuruse võrra, mis on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus, kui Δx ja Δy. Seega võime kirjutada

$$\Delta z \approx dz$$

ehk

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Siit saame ligikaudse arvutamise valemi

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{6.10}$$

Näide 3. Arvutame täisdiferentsiaali abil ligikaudu $2,03^3 \cdot 0,96^2$.

Siin valime $f(x,y) = x^3y^2$, $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = 0,03$ ja $\Delta y = -0,04$. Osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y.$$

Funktsiooni väärtus $f(2,1) = 8 \cdot 1 = 8$ ja osatuletiste väärtused $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$ ja $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cdot 8 \cdot 1 = 16$. Valemist (6.10)

$$(2+0,03)^3 \cdot (1-0,04)^2 = 8 + 12 \cdot 0,03 - 16 \cdot 0,04 = 7,72.$$

Kui kolme muutuja funktsioon $w = f(x,y,z)$ ja selle osatuletised $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ ja $\frac{\partial w}{\partial z}$ on pidevad punktis $P(x,y,z)$ ja selle mingis ümbruses, siis sarnaselt valemile (6.8) on võimalik näidata, et täismuut

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z, \tag{6.11}$$

kus $\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z$ on kõrgemat järku lõpmatult kahanev suurus kui $\Delta\varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Funktsiooni w täisdiferentsiaaliks nimetatakse avaldist

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz. \tag{6.12}$$

Viimases langevad sõltumatute muutujate muudud ja diferentsiaalid kokku, st $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ ja $dz = \Delta z$.

Näide 4. Leiame kolme muutuja funktsiooni $w = x^{y^z}$ täisdiferentsiaali avaldise.

Toetudes punkti 6.5 näite 3 tulemustele, kirjutame

$$\begin{aligned} dw &= y^z x^{y^z-1} dx + x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1} dy + x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y = \\ &= y^z x^{y^z} \left(\frac{dx}{x} + \frac{z \ln x dy}{y} + \ln x \ln y \right). \end{aligned}$$

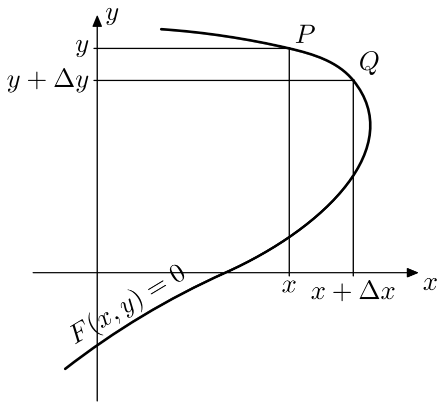
6.7 Ilmutamata funktsiooni osatuletised

Olgu antud pidev funktsioon ilmutamata kujul

$$F(x, y) = 0. \tag{6.13}$$

See võrdus määrab muutuja y muutuja x (reeglina mitte ühese) funktsioonina. Funktisooni graafikuks on joon tasandil (joonis 6.10).

Eeldame, et funktsioonil $F(x, y)$ eksisteerivad punktis $P(x, y)$ ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised ja et $F'_y(x, y) \neq 0$. Tuletame valemi $\frac{dy}{dx}$ leidmiseks kahe muutuja funktsiooni $F(x, y)$ osatuletiste abil.



Joonis 6.10. Ilmutamata funktsioon $F(x, y) = 0$

Fikseerime funktsiooni graagikul punkti $P(x, y)$. Selle koordinaadid rahuldavad võrrandit (6.13). Muudame x muudu Δx võrra ja leiame punktile $x + \Delta x$ vastava funktsiooni väärtuse $y + \Delta y$. Et $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ on samuti funktsiooni graafiku punkt, rahuldavad selle punkti koordinaadid võrrandit

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0. \tag{6.14}$$

Lahutades võrrandist (6.14) võrrandi (6.13), saame

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Viimase võrduse vasak pool on funktsiooni $F(x,y)$ täismuut, st

$$\Delta F = 0.$$

Tehted eelduste tõttu saame funktsiooni täismuudu avaldise (6.8) põhjal

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0,$$

millest

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right)\Delta y = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x$$

ehk

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \beta}.$$

Leiame tekkinud võrduse mõlemalt poolt piirväärtuse piirprotsessis $\Delta x \to 0$. Vasaku poole piirväärtus on funktsiooni tuletise definitsiooni kohaselt $\dfrac{dy}{dx}$. Funktsiooni pidevuse tõttu ka $\Delta y \to 0$. Et α ja β on piirprotsessis $(\Delta x, \Delta y) \to (0;0)$ lõpmatult kahanevad suurused, siis $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha = 0$ ja $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \beta = 0$ ning pärast parema poole piirväärtuse leidmist saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Seega saab ühe muutuja ilmutamata funktsiooni tuletise leidmiseks kasutada ka valemit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{6.15}$$

Näide 1. Leiame ilmutamata funktsiooni $x^4 + y^4 - a^2x^2y^2 = 0$ tuletise $\dfrac{dy}{dx}$.

Siin $F(x,y) = x^4 + y^4 - a^2x^2y^2$, seega $F'_x = 4x^3 - 2a^2xy^2$ ja $F'_y = 4y^3 - 2a^2x^2y$. Valemi (6.15) järgi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^3 - 2a^2xy^2}{4y^3 - 2a^2x^2y} = -\frac{x(2x^2 - a^2y^2)}{y(2y^2 - a^2x^2)}.$$

Vaatleme ilmutamata pidevat funktsiooni $F(x,y,z) = 0$. See võrrand määrab muutuja z kahe muutuja x ja y funktsioonina. Eeldame, et funktsioonil $F(x,y,z)$ eksisteerivad punktis $P(x,y,z)$ ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ ja $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ ning $F'_z(x,y,z) \neq 0$.

Funktsiooni z osatuletise leidmisel x järgi vaatleme muutujat y konstandina. Siis on võrrandis $F(x, y, z) = 0$ ainult kaks muutjat x ja z ning (6.15) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}. \tag{6.16}$$

Samasuguse arutluse korral muutuja y jaoks

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{6.17}$$

Näide 2. Leiame ilmutamata kujul esitatud kahe muutuja funktsiooni $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Selleks leiame $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$ ja $F'_z = 2z$. Valemi (6.16) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

ja valemi (6.17) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

6.8 Liitfunktsiooni osatuletised

Olgu z kahe muutuja u ja v funktsioon $z = f(u, v)$ ning u ja v omakorda kahe muutja x ja y funktsioonid $u = \varphi(x, y)$ ja $v = \psi(x, y)$. Sellisel juhul z on liitfunktsioon muutjate x ja y suhtes, st

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = F(x, y).$$

Eeldame, et funktsioonidel u ja v on punktis $P(x, y)$ ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$ ning funktsioonil z vastavas punktis (u, v) ja selle mingis ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial z}{\partial u}$ ja $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Jättes argumeni y konstantseks, muudame argumenti x suuruse Δx võrra. Sellele vastavad funktsioonide u ja v osamuudud x järgi $\Delta_x u$ ja $\Delta_x v$. Need aga on funktsiooni $z = f(u, v)$ argumentide muutudeks. Neile vastab funktsiooni täismuut, mis (6.8) järgi on

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v,$$

kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused piirprotsessis $(\Delta_x u, \Delta_x v) \to (0; 0)$. Jagades viimase võrduse argumendi x muuduga Δx, saame

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Leiame mõlemalt poolt piirväärtuse piirprotsessis $\Delta x \to 0$. Vasakul saame liitfunktsiooni z osatuletise x järgi $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, sest z täismuut tekkis ainult x muutmise tagajärjel, kusjuures y jäi konstantseks. Eeldasime $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ olemasolu. Diferentseeruvusest muutuja x järgi järeldub funktsioonide u ja v pidevus muutuja x järgi, seega

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x u = 0$$

ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x v = 0.$$

Järelikult ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \beta = 0.$$

Kasutades veel funktsioonide u ja v osatuletiste definitsioone muutuja x jägri, saame parema poole piirväärtuseks

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kokkuvõttes saame liitfunktsiooni $z = F(x, y)$ osatuletise x järgi leidmiseks valemi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6.18}$$

Jättes muutuja x konstantseks ja andes muutujale y muudu Δy, saame kogu arutlust korrates valemi liitfunktsiooni z osatuletise leidmiseks muutuja y järgi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{6.19}$$

Näide 1. Leiame $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, kui $z = \ln(u^2 + v)$, $u = e^{x+y^2}$ ja $v = x^2 + y$.
Valemid (6.18) ja (6.19) sisaldavad kuut osatuletist. Leiame

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1;$$

Valemi (6.18) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v}e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v}2x = \frac{2}{u^2 + v}(ue^{x+y^2} + x)$$

ja valemi (6.19) järgi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}(4uye^{x+y^2}+1).$$

Märkus. Kui z on kolme muutja funktsioon $z = f(u, v, w)$ ja lisaks funktsioonidele u ja v on $w = \chi(x, y)$, siis liitfunktsiooni z osatuletised muutujate x ja y järgi leitakse valemite

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{6.20}$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{6.21}$$

abil.

Olgu nüüd z kolme muutja x, u ja v funktsioon $z = f(x, u, v)$, kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$. Siis z on ühe muutuja x liitfunktsioon

$$z = f(x, \varphi(x), \psi(x)),$$

mille tuletise $\frac{dz}{dx}$ leidmiseks saame valemi (6.20) abil. Et x tuletis x järgi $\frac{dx}{dx} = 1$ ja u ning v on ühe muutuja funktisoonid, siis

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{6.22}$$

Valemit (6.22) nimetatakse *täistuletise* valemiks.

Näide 2. Leiame $\frac{dz}{dx}$, kui $z = x^2 + \sqrt{y}$ ja $y = x^2 + 1$.

Antud juhul z on kahe muutuja x ja y funktsiooni, kus y on muutja x funktsioon. Antud olukorra jaoks annab täistuletise valem (6.22) tulemuse

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Leiame punkti alguses vaadeldud liitfunktsiooni $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$ ja $v = \psi(x, y)$ täisdiderentsiaali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{6.23}$$

Asendades valemitega (6.18) ja (6.19) määratud osatuletised sellesse avaldisse, saame

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

ehk pärast teisendamist

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Kuid sulgudes on vastavalt funktsioonide u ja v täisdiferentsiaalid

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ja

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Seega

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv, \tag{6.24}$$

Võrreldes omavahel täisdiferentsiaali avaldisi (6.23) ja (6.24) näeme, et mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali kuju ei sõltu sellest, kas u ja v on sõltumaltud muutujad või omakorda muutujate x ja y funktsioonid. Viimast omadust nimetatakse *täisdiferentsiaali invariantsuse omaduseks.*

6.9 Kõrgemat järku osatuletised

Näidetest on selgunud, et kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ on üldiselt kahe muutuja funktsioonid. Seega on võimalik mõlemat diferentseerida kahe muutuja x ja y järgi.

Definitsioon 1. Kahe muutuja funktisooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks x järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (loetakse *de-ruut-dzett de-iks-ruut*) nimetatakse osatuletise x järgi osatuletist x järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Definitsioon 2. Kahe muutuja funktisooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks x ja y järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ nimetatakse osatuletise x järgi osatuletist y järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Definitsioon 3. Kahe muutuja funktisooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks y ja x järgi $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ nimetatakse osatuletise y järgi osatuletist x järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Definitsioon 4. Kahe muutuja funktisooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiseks y järgi $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ nimetatakse osatuletise y järgi osatuletist y järgi, st

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Nende teist järku osatuletiste jaoks kasutatakse veel tähistusi vastavalt z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx} ja z''_{yy} või $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ ja $f''_{yy}(x, y)$.

Saadud teist järku osatuletised on omakorda kahe muutuja x ja y funktsioonid. Seega saab kõigist neljast leida osatuletised x ja y järgi. ja nii saadakse kaheksa kolmandat järku osatuletist

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Näide 1. Leiame kahe muutuja funktsiooni $z = \arctan\dfrac{x}{y}$ teist järku osatuletised.

Punkti 6.5 näites 2 leidsime, et

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

Leiame

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = y\left(-\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = -x\left(-\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Esitatud näite põhjal võib püstitada küsimuse, kas teist järku osatuletised

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

on alati võrdsed. Alati see nii ei ole, aga teatud tingimustel siiski. Tõestuseta formuleerime teoreemi.

Teoreem. Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ ja selle osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ on pidevad punktis P ja selle mingis ümbruses, siis punktis P

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Vajalike osatuletiste pidevuse korral ei sõltu ka kõrgemat järku osatuletised diferentseerimise järjekorrast, vaid ainult sellest, mitu korda on kummagi muutuja järgi diferentseeritud. Näiteks võime kõigi madalamat järku osatuletiste ja ka vaadeldavate osatuletiste pidevuse korral punktis ja selle ümbruses kirjutada

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial x^2}$$

Samasugune teoreem kehtib ka kolme ja enam muutuja funktsiooni puhul.

Näide 2. Leiame kolme muutuja funktsiooni $w = e^x \sin(yz)$ kolmandat järku osatuletised $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ ja $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y}$.

Esimese kolmandat järku osatuletise jaoks leiame kõigepealt

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^x \sin(yz),$$

siis

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = e^x \cos(yz) \cdot z = z e^x \cos(yz)$$

ja kolmandaks

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = e^x \cos(yz) + z(-e^x \sin(yz)) \cdot y = e^x [\cos(yz) - yz \sin(yz)]$$

Teise kolmandat järku osatuletise jaoks leiame

$$\frac{\partial w}{\partial z} = y e^x \cos(yz)$$

seejärel

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = y e^x \cos(yz)$$

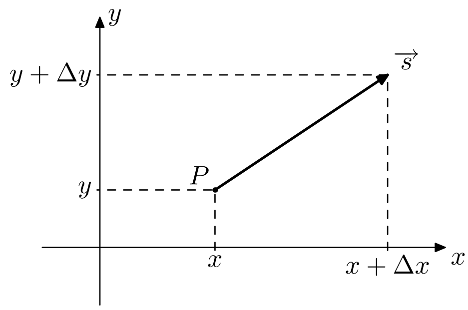
ja lõpuks

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y} = e^x \cos(yz) - y e^x \sin(yz) \cdot z = e^x [\cos(yz) - yz \sin(yz)].$$

6.10 Tuletis antud suunas

Käesolevas punktis seame eesmärgiks leida mitme muutuja funktsiooni tuletis antud punktis mingi vektori suunas.

Alustame kahe muutja funktsioonist $z = f(x, y)$ ja tuletame valemi tuletise arvutamiseks punktis $P(x, y)$ vektori $\overrightarrow{s} = (\Delta x, \Delta y)$ suunas (joonis 6.11). Eeldame, et funktsioon $z = f(x, y)$ ja selle osatuletised $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ on pidevad punktis P ja selle mingi ümbruses.



Joonis 6.11. Punkti P rakendatud vektor

Tähistame vektori $\overrightarrow{s}$ pikkuse $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Argumentide muutudele Δx ja Δy vastav täismuudu avaldis on (6.8) järgi

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

kus ε_1 ja ε_2 on piirprotsessis $\Delta s \to 0$ lõpmatult kahanevad suurused. Jagades viimase võrduse vektori $\overrightarrow{s}$ pikkusega, saame

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

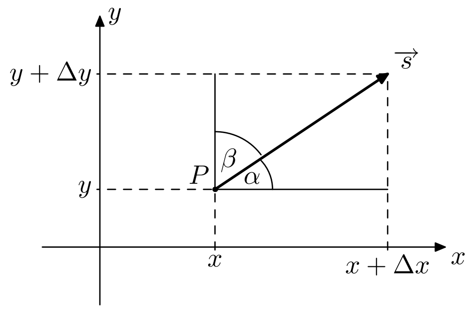
Suhted $\dfrac{\Delta x}{\Delta s}$ ja $\dfrac{\Delta y}{\Delta s}$ on vektori $\overrightarrow{s}$ suunalise ühikvektori $\overrightarrow{s^\circ}$ koordinaadid. Kui tähistada vektori $\overrightarrow{s}$ ja koordinaattelgede positiivsete suundade vahelisi nurki α ja β, on ilmne,et

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha \quad \text{ja} \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta$$

Seepärast nimetatakse neid suhteid, st vektori suunalise ühikvektori koordinaate, vektori $\overrightarrow{s}$ *suunakoosinusteks.*

Definitsioon. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta s}$$



Joonis 6.12.

nimetatakse funktsiooni z tuletiseks punktis P vektori $\overrightarrow{s}$ suunas ja tähistatakse $\dfrac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s}}$. Et

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left(\varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s}\right) = 0,$$

siis saame suunatuletise leidmiseks valemi

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta \tag{6.25}$$

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^2 + y^2$ tuletised punktis $P(1;1)$ vektorite $\overrightarrow{s_1} = (1;1)$ ja $\overrightarrow{s_2} = (1;-1)$ suunas.

Kõigepealt arvutame funktsiooni osatuletised punktis P

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\Big|_P = 2$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\Big|_P = 2$$

Leides vektori $\overrightarrow{s_1}$ pikkuse $\Delta s_1 = \sqrt{2}$, saame suunakoosinusteks $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ning

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s_1}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Leides vektori $\overrightarrow{s_2}$ pikkuse $\Delta s_2 = \sqrt{2}$, saame suunakoosinusteks $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ning

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s_2}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Seega, lähtudes ühest ja samast punktist xy-tasandil saame erinevas suunas liikudes erinevad suunatuletiste väärtused. Suunatuletise väärtus iseloomustab funktsiooni kasvukiirust lähtudes antud punktist etteantud suunas.

Suunatuletis on osatuletiste x ja y järgi üldistuseks. Kui vektor $\overrightarrow{s}$ on x telje suunaline, siis $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = 1$ ja $\cos\beta = 0$ ning

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s}} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Kui vektor $\overrightarrow{s}$ on y telje suunaline, siis $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = 0$, $\cos\alpha = 0$ ja $\cos\beta = 1$ ning

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Seega funktsiooni tuletis x-telje suunas on selle funktsiooni osatuletis x järgi ja y-telje suunas osatuletis y järgi.

Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x, y, z)$ tuletise leidmiseks punktis $P(x, y, z)$ vektori $\overrightarrow{s} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ suunas kehtib sarnane valem. Tähistagu α, β ja γ vastavalt nurki vektori $\overrightarrow{s}$ ja x-teje, vektori $\overrightarrow{s}$ ja y-telje ning vektori $\overrightarrow{s}$ ja z-telje vahel. Siis vektori $\overrightarrow{s}$ suunakoosinused on $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ ning suunatuletis leitakse valemist

$$\frac{\partial w}{\partial \overrightarrow{s}} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\gamma \tag{6.26}$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $w = xy + xz + yz$ tuletise punktis $P(1; 1; 2)$ suunas, mis moodustab koordinaattalgedega nurga $60°$, $60°$ ja $45°$.

Arvutame osatuletised punktis P

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y + z\Big|_P = 3, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x + z\Big|_P = 3$$

ja

$$\frac{\partial w}{\partial z} = x + y\Big|_P = 2$$

ning suunakoosinused

$$\overrightarrow{s^\circ} = (\cos 60°; \cos 60°; \cos 45°) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Valemi (6.26) järgi leiame

$$\frac{\partial w}{\partial \overrightarrow{s}} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2}.$$

6.11 Gradient

Kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ seab igale punktile $P(x, y)$ funktsiooni määramispiirkonnast D vastavusse muutuja z väärtuse ehk skalaari. Igale määramispiirkonna punktile vastab skalaar. Seega saab kahe muutuja funktsioonist kõneleda kui skalaarväljast.

Kolme muutuja funktsioon $w = f(x, y, z)$ seab igale ruumi punktile $P(x, y, z)$ funktsiooni määramispiirkonnast V vastavusse skalaari, st piirkonnas V tekitab kolme muutuja funktsioon skalaarvälja.

Definitsioon 1. Skalaarvälja $z = f(x, y)$ gradientvektoriks ehk gradiendiks nimetatakse vektorit

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{6.27}$$

Definitsioon 2. Skalaarvälja $w = f(x, y, z)$ gradientvektoriks ehk *gradiendiks* nimetatakse vektorit

$$\operatorname{grad} w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{6.28}$$

Esimesel juhul tekib tasandi mingis punktihulgas ja teisel juhul ruumi punktihulgas vektorväli, mida nimetatakse *gradientide väljaks.*

Arvestdes sellega, et $\overrightarrow{s^\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, saab suunatuletise arvutamise valemi (6.25) kirjutada gradiendi ja vektori $\overrightarrow{s^\circ}$ skalaarkorrutisena

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s}} = \operatorname{grad} z \cdot \overrightarrow{s^\circ}$$

Et $\overrightarrow{s^\circ} = \dfrac{\overrightarrow{s}}{\Delta s}$, siis

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s}} = \operatorname{grad} z \cdot \frac{\overrightarrow{s}}{\Delta s} = |gradz| \frac{\operatorname{grad} z \cdot \overrightarrow{s}}{|\operatorname{grad} z| \Delta s},$$

kus $|\operatorname{grad} z|$ on gradientvektori pikkus. Kui tähistada gradiendi ja vektori $\overrightarrow{s}$ vahelist nurka φ, siis

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{grad} z \cdot \overrightarrow{s}}{|\operatorname{grad} z| \Delta s}$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s}} = |\operatorname{grad} z| \cos\varphi. \tag{6.29}$$

Tulemuse sõnastame teoreemina.

Teoreem 1. Funktsiooni $z = f(x, y)$ tuletis vektori $\overrightarrow{s}$ suunas võrdub gradientvektori projektsiooniga vektori $\overrightarrow{s}$ suunale.

Sellest teoreemist teeme kaks järeldust.

Järeldus 1. Tuletis gradiendiga ristuvas suunas võrdub nulliga.

Järelus on ilmne, sest antud juhul $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ja $\dfrac{\partial z}{\partial \overrightarrow{s}} = 0$.

Järeldus 2. Tuletis on suurim gradiendi suunas ja arvuliselt võrdne gradiendi pikkusega.

Põhjenduseks piisab märkida, et koosinusfunktsioon saavutab oma maksimaalse väärtuse 1, kui $\varphi = 0$.

Näide 1. Leiame funktsiooni $z = x^2 + y^2$ suurima kasvukiiruse punktis $P(1;1)$.

Funktsiooni kasvukiirust iseloomustab funktsiooni tuletis. Seega on suurim kasvukiirus võrdne gradientvektori pikkusega. Leiame

$$\operatorname{grad} z = (2x, 2y)\Big|_P = (2;2)$$

ja selle pikkuse $|\operatorname{grad} z| = 2\sqrt{2}$.

Tulemus ühtib eelmise punkti näites 1 leitud tuletisega vektori $\overrightarrow{s_1}$ suunas, mis on loomulik, sest vektor $\overrightarrow{s_1} = (1;1)$ on gradiendi suunaline.

Teoreem 2. Gradient on risti nivoojoone puutujaga.

Tõestus. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,y)$ graafiku nivoojoone projektsioon xy-tasandil on $f(x,y) = c$. Nivoojoone puutuja suunaline vektor on $\overrightarrow{s} = \left(1; -\dfrac{f'_x}{f'_y}\right) = \dfrac{1}{f'_y}(f'_y, -f'_x)$ ja gradiendi ning puutuja suunalise vektori skalaarkorrutis $\operatorname{grad} z \cdot \overrightarrow{s} = f'_x f'_y - f'_y f'_x = 0$, st gradient on nivoojoone puutujaga risti.

Järeldusest 1 saame nüüd.

Järeldus 3. Funtksiooni tuletis nivoojoone puutuja suunas võrdub nulliga.

Eelmise punkti näites 1 antud vektor $\overrightarrow{s_2}$ on nivoojoone puutuja suunaline, seega on loomulik, et tuletis selle vektori suunas võrdub nulliga.

6.12 Divergents ja rootor

Eelmises punktis vaadeldud gradientide väli on üks näide vektorväljast. Käesolevas punktis vaatleme mis tahes vektorvälja $\overrightarrow{F} = (X(x,y,z); Y(x,y,z); Z(x,y,z))$, milles kõik koordinaadid on üldjuhul oma rakenduspunkti $P(x,y,z)$ funktsioonid. Tüüpilisteks vektorväljadeks on kiiruste väli ja jõuväli.

Definitsioon 1. Vektorvälja $\overrightarrow{F}$ divergentsiks punktis $P(x,y,z)$ nimetatakse skalaari

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \tag{6.30}$$

Definitsioon 2. Vektorvälja $\overrightarrow{F}$ rootoriks punktis $P(x,y,z)$ nimetatakse vektorit

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \tag{6.31}$$

Näide 1. Leiame vektorvälja $\overrightarrow{F}=\left(xyz; x^2+z^2; \frac{xy}{z}\right)$ divergentsi ja rootori.

Antud näites $X=xyz$, $Y=x^2+z^2$, $Z=\frac{xy}{z}$, seega $\frac{\partial X}{\partial x}=yz$, $\frac{\partial Y}{\partial y}=0$ ja $\frac{\partial Z}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2}$ ning

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F}=yz-\frac{xy}{z^2}$$

Edasi leiame rootorvektori koordinaadid

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{x}{z}-2z$$

$$\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=xy-\frac{y}{z}$$

ja

$$\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=2x-xz$$

Seega

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\left(\frac{x}{z}-2z; xy-\frac{y}{z}; 2x-xz\right)$$

Väljateoorias kasutatakse formaalset vektorit.

Definitsioon 3. *Hamiltoni nablavektoriks* ehk *Hamiltoni nablaoperaatoriks* nimetatakse vektorit

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Kasutades seda operaatorit tavalise vektorina, saame skalaarvälja $w=f(x,y,z)$ korral

$$\nabla w=\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)w=\left(\frac{\partial w}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial y}; \frac{\partial w}{\partial z}\right)=\operatorname{grad} w$$

Nablavektori ja vektorvälja $\overrightarrow{F}=(X(x,y,z); Y(x,y,z); Z(x,y,z))$ skalaarkorrutis

$$\nabla\cdot\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(X;Y;Z)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\operatorname{div}\overrightarrow{F}$$

Nablavektori ja vektorvälja $\overrightarrow{F}=(X(x,y,z); Y(x,y,z); Z(x,y,z))$ vektorkorrutis

$$\nabla\times\overrightarrow{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(X;Y;Z)=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}; \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$$

Seega saame Hamiltoni nabloperaatori abil lühidalt kirjutada

$$\operatorname{grad} w=\nabla w,$$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \nabla\cdot\overrightarrow{F},$$
$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \nabla\times\overrightarrow{F}.$$

Definitsioon 4. Nablavektori skalaarruutu $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$ nimetatakse Laplace'i operaatoriks ja tähistatakse
$$\triangle = \nabla^2$$
Skalaarkorrutise arvutusvalemi järgi
$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $w = e^x \sin(yz)$ Laplace'i operaatori.

Esiteks
$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^x \sin(yz)$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = ze^x \cos(yz)$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = ye^x \cos(yz)$$
ja siis
$$\begin{aligned}\triangle w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\\ &= e^x\sin(yz) - z^2e^x\sin(yz) - y^2e^x\sin(yz)\\ &= e^x\sin(yz)(1-z^2-y^2) = w(1-z^2-y^2)\end{aligned}$$

Lõpuks näitame, et skalaarvälja $w = f(x,y,z)$ ja vektorvälja $\overrightarrow{F} = (X;Y;Z)$ korral kehtivad võrdused.

Lause 1. $\operatorname{div}\operatorname{grad} w = \triangle w$

Tõestuseks kirjutame
$$\operatorname{div}\operatorname{grad} w = \nabla\cdot\operatorname{grad} w = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial x};\frac{\partial w}{\partial y};\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Lause 2. $\operatorname{div} w\overrightarrow{F} = \operatorname{grad} w\cdot\overrightarrow{F} + w\operatorname{div}\overrightarrow{F}$

Tõestus. Väljendades divergentsi Hamiltoni nablaoperaatori kaudu, saame
$$\begin{aligned}\operatorname{div} w\overrightarrow{F} &= \nabla\cdot w\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(wX;wY;wZ)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(wX) + \frac{\partial}{\partial y}(wY) + \frac{\partial}{\partial z}(wZ)\\ &= \frac{\partial w}{\partial x}X + w\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}Y + w\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}Z + w\frac{\partial Z}{\partial z}\\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x};\frac{\partial w}{\partial y};\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cdot(X;Y;Z) + w\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\\ &= \operatorname{grad} w\cdot\overrightarrow{F} + w\operatorname{div}\overrightarrow{F}\end{aligned}$$

Lause 3. $\operatorname{rot} w\overrightarrow{F} = \operatorname{grad} w \times \overrightarrow{F} + w \operatorname{rot} \overrightarrow{F}$

Tõestus. Kirjutades rootori Hamiltoni nablaoperaatori kaudu, saame

$$\begin{aligned}
& \operatorname{rot} w\overrightarrow{F} = \nabla \times w\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (wX; wY; wZ) \\
= & \left(\frac{\partial(wZ)}{\partial y} - \frac{\partial(wY)}{\partial z}; \frac{\partial(wX)}{\partial z} - \frac{\partial(wZ)}{\partial x}; \frac{\partial(wY)}{\partial x} - \frac{\partial(wX)}{\partial y}\right) \\
= & \left(\frac{\partial w}{\partial y}Z + w\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}Y - w\frac{\partial Y}{\partial z}; \frac{\partial w}{\partial z}X + w\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}Z - w\frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial w}{\partial x}Y + w\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}X - w\right. \\
= & \left(\frac{\partial w}{\partial y}Z - \frac{\partial w}{\partial z}Y; \frac{\partial w}{\partial z}X - \frac{\partial w}{\partial x}Z; \frac{\partial w}{\partial x}Y - \frac{\partial w}{\partial y}X\right) \\
+ & \; w\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) \\
= & \operatorname{grad} w \times \overrightarrow{F} + w \operatorname{rot} \overrightarrow{F}
\end{aligned}$$

6.13 Kahe muutuja funktsiooni Taylori valem

Ühe muutuja funktsiooni Taylori valemi eesmärgiks on esitada mis tahes funktsiooni punkti $x = a$ ümbruses võimalikult täpselt hulkliikmena $x - a$ astmete järgi. Kui funktsioon $f(x)$ ja selle tuletised kuni $n + 1$ järguni on pidevad punktis a ja selle ümbruses, siis

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{6.32}$$

Taylori valemi jääkliikme Lagrange'i kuju on

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \Theta(x-a)] \tag{6.33}$$

kus $0 < \Theta < 1$, st $a + \Theta(x-a)$ on mingisugune punkt a ja x vahel.

Olgu kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ ja selle osatuletised piisavalt kõrge järguni pidevad punktis $A(a, b)$ ja selle mingis ümbruses. Kahe muutuja funktsiooni korral piirdume 2. järku Taylori valemiga. Fikseerime y väärtuse ja arendame ühe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ valemi (6.32) põhjal $x - a$ astmete järgi

$$f(x,y) = f(a,y) + \frac{f'_x(a,y)}{1!}(x-a) + \frac{f''_{xx}(a,y)}{2!}(x-a)^2 + R_{2,1}(x,y) \tag{6.34}$$

kus $R_{2,1}(x,y) = \dfrac{(x-a)^3}{3!} f'''_{xxx}(\xi, y)$ ja ξ on mingi punkt a ja x vahel.

Edasi arendame $f(a, y)$, $f'_x(a, y)$ ja $f''_{xx}(a, y)$ Taylori valemi (6.32) põhjal $y - b$ astmete järgi. Esiteks

$$f(a,y) = f(a,b) + \frac{f'_y(a,b)}{1!}(y-b) + \frac{f''_{yy}(a,b)}{2!}(y-b)^2 + R_{2,2}(a,y)$$

kus $R_{2,2}(a,y) = \dfrac{(y-b)^3}{3!} f'''_{yyy}(a,\eta_1)$ ja η_1 on punkt b ja y vahel. Teiseks

$$f'_x(a,y) = f'_x(a,b) + \frac{f''_{xy}(a,b)}{1!}(y-b) + R_{2,3}(a,y)$$

kus $R_{2,3}(a,y) = \dfrac{(y-b)^2}{2!} f'''_{xyy}(a,\eta_2)$ ja η_2 on punkt b ja y vahel. Kolmandaks

$$f''_{xx}(a,y) = f''_{xx}(a,b) + R_{2,4}(a,y)$$

kus $R_{2,4}(a,y) = \dfrac{y-b}{1!} f'''_{xxy}(a,\eta_3)$ ja η_3 on punkt b ja y vahel.

Asendades kõik kolm avaldisse (6.34), saame

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{f'_y(a,b)}{1!}(y-b) + \frac{f''_{yy}(a,b)}{2!}(y-b)^2 + R_{2,2}(a,y) \\ &+ \frac{x-a}{1!}\left[f'_x(a,b) + \frac{f''_{xy}(a,b)}{1!}(y-b) + R_{2,3}(a,y)\right] \\ &+ \frac{(x-a)^2}{2!}[f''_{xx}(a,b) + R_{2,4}(a,y)] + R_{2,1}(x,y) \end{aligned}$$

ehk pärast nurksulgude avamist ja liikmete ümberjärjestamist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{f'_x(a,b)}{1!}(x-a) + \frac{f'_y(a,b)}{1!}(y-b) \\ &+ \frac{f''_{xx}(a,b)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f''_{xy}(a,b)}{1!}(x-a)(y-b) + \frac{f''_{yy}(a,b)}{2!}(y-b)^2 \\ &+ R_{2,1}(x,y) + R_{2,2}(a,y) + (x-a)R_{2,3}(a,y) + \frac{(x-a)^2}{2!}R_{2,4}(a,y) \end{aligned}$$

Tähistades teist järku Taylori valemi jääkliikme

$$R_2 = R_{2,1}(x,y) + R_{2,2}(a,y) + (x-a)R_{2,3}(a,y) + \frac{(x-a)^2}{2!}R_{2,4}(a,y)$$

saame kahe muutuja funktsiooni $f(x,y)$ teist järku Taylori valemi punkti $A(a,b)$ ümruses (ehk $x-a$ ja $y-b$ astmete järgi)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{f'_x(a,b)}{1!}(x-a) + \frac{f'_y(a,b)}{1!}(y-b) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f''_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f''_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + R_2 \end{aligned}$$

Tähistame jääkliikme

$$\begin{aligned} R_2 = \frac{(x-a)^3}{3!}f'''_{xxx}(\xi,y) &+ \frac{(y-b)^3}{3!}f'''_{yyy}(a,\eta_1) \\ &+ (x-a)\frac{(y-b)^2}{2!}f'''_{xyy}(a,\eta_2) + \frac{(x-a)^2}{2!}(y-b)f'''_{xxy}(a,\eta_3) \end{aligned}$$

avaldises $x - a = \Delta x$ ja $y - b = \Delta y$, saame

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[(\Delta x)^3 f'''_{xxx}(\xi, y) + 3(\Delta x)^2\Delta y f'''_{xxy}(a, \eta_3) + 3\Delta x(\Delta y)^2 f'''_{xyy}(a, \eta_2) + (\Delta y)^3 f'''_{yyy}(a, \eta_1)\right]$$

ehk traditsioonilist tähistust $\Delta\varrho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ kasutades

$$R_2 = \frac{(\Delta\varrho)^3}{3!}\left[\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta\varrho)^3} f'''_{xxx}(\xi, y) + \frac{3(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta\varrho)^3} f'''_{xxy}(a, \eta_3) + \frac{3\Delta x(\Delta y)^2}{(\Delta\varrho)^3} f'''_{xyy}(a, \eta_2) + \frac{(\Delta y)^3}{(\Delta\varrho)^3} f'''_{yyy}(a, \eta_1)\right]$$

Eelduse kohaselt on nurksulgudes olevad kolmandat järku osatuletised pidevad punkti $A(a, b)$ ümbruses, seega tõkestatud. Lisaks on $\left|\frac{\Delta x}{\Delta\varrho}\right| \le 1$ ja $\left|\frac{\Delta y}{\Delta\varrho}\right| \le 1$. Seega on jääkliikme R_2 avaldises $(\Delta\varrho)^3$ kordaja tõkestatud suurus. Tähistades selle α_0, saame $R_2 = \alpha_0(\Delta\varrho)^3$ ja viimast kasutades on kahe muutuja funktsiooni Taylori valem

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{f'_x(a, b)}{1!}(x - a) + \frac{f'_y(a, b)}{1!}(y - b) \\ &+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2\right] + \alpha_0(\Delta\varrho)^3 \end{aligned} \tag{6.35}$$

6.14 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Definitsioon 1. Öeldakse, et kahe muutuja funktsioonil on punktis $P_1(x_1, y_1)$ lokaalne maksimum, kui sellel punktil leidub niisugune ümbrus $U_\varepsilon(x_1, y_1)$, et iga $P(x, y) \in U_\varepsilon(x_1, y_1)$ on $f(x, y) < f(x_1, y_1)$.

Definitsioonis on eeldatud, et punkt $P(x, y)$ erineb punktist $P_1(x_1, y_1)$.

Definitsioon 2. Öeldakse, et kahe muutuja funktsioonil on punktis $P_2(x_2, y_2)$ lokaalne miinimum, kui sellel punktil leidub niisugune ümbrus $U_\varepsilon(x_2, y_2)$, et iga $P(x, y) \in U_\varepsilon(x_2, y_2)$ on $f(x, y) > f(x_2, y_2)$.

Näide 1. Definitsioon 2 järgi on kahe muutuja funktisoonil $z = x^2 + y^2$ punktis $P_0(0; 0)$ lokaalne miinimum, sest $f(0; 0) = 0$ ja mis tahes punktist P_0 erineva punkti $P(x, y)$ korral $f(x, y) = x^2 + y^2 > 0$.

Näide 2. Funktsioonil $z = x^2 - y^2$ ei ole punktis $P_0(0; 0)$ lokaalset ekstreemumi, sest $f(0; 0) = 0$, aga igasugune $U_\varepsilon(0; 0)$ sisaldab nii x- kui ka y-telje punkte ning x-telje punktides $y = 0$ ja $z = x^2 > 0$, y-telje punktides $x = 0$ ja $z = -y^2 < 0$.

Kui kahe muutuja funktsioonil on punktis $P_0(x_0, y_0)$ lokaalne ekstreemum, siis on lokaalne ekstreemum ka kahe muutuja funktisooni graafikuks oleva pinna tasandilõikel tasandiga $y = y_0$, st ühe muutuja funktsioonil $z = f(x, y_0)$. Sellisel juhul punktis P_0 kas $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ või puudub. Samuti on lokaalne ekstreemum tasandilõikel tasandiga $x = x_0$, st ühe muutja funktsioonil $z = f(x_0, y)$. Siis punktis P_0 kas $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ või puudub.

Definitsioon 3. Punkte, kus $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ või puudub ja $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ või puudub, nimetatakse kahe muutja funktsiooni *kriitilisteks punktideks*. Kokku võttes võime sõnastada teoreemi.

Teoreem 1. (Lokaalse ekstreemumi olemasoluks tarvilik tingimus) Kui kahe muutuja funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktis P_0 lokaalne ekstreemum, siis punkt P_0 on selle kahe muutuja funktsiooni kriitiline punkt.

Viimane tingimus on tarvilik lokaalse ekstreemumi olemasoluks, st mujal kui kriitilises punktis kahe muutuja funktsioonil lokaalset ekstreemumi ei ole. Aga see tingimus ei ole piisav ekstreemumi olemasoluks. Näites 2 vaadeldud funktsiooni $z = x^2 - y^2$ osatuletised $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ja $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$ võrduvad mõlemad 0-ga punktis $P_0(0; 0)$, aga nagu veendusime, selles punktis antud kahe muutuja funktsioonil lokaalset ekstreemumi ei ole.

Seega tekib probleem, kuidas teha kindlaks, kas kahe muutuja funktsioonil on kriitilises punktis lokaalset ekstreemumi ja kummaga on tegemist, kas lokaalse maksimumi või lokaalse miinimumiga.

Edaspidi vaatleme ainult niisuguseid kriitilisi punkte, kus mõlemad osatuletised võrduvad 0-ga, st kriitilisi punkte, mis on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{6.36}$$

lahenditeks. Selliseid punkte nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ *statsionaarseteks punktideks.*

Olgu P_0 kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ statsionaarne punkt. Arvutame teist järku osatuletiste väärtused punktis P_0 ja tähistame

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} \quad \text{ja} \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0}.$$

Teoreem 2. (Piisavad tingimused kahe muutuja funktsiooni lokaalse ekstreemumi olemasoluks) Olgu P_0 kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ statsionaarne punkt.

1. Kui $AC - B^2 > 0$ ja $A < 0$, siis on kahe muutuja funktsioonil statsionaarses punktis P_0 lokaalne maksimum.

2. Kui $AC - B^2 > 0$ ja $A > 0$, siis on kahe muutuja funktsioonil statsionaarses punktis P_0 lokaalne miinimum.

3. Kui $AC - B^2 < 0$, siis kahe muutuja funktsioonil statsionaarses punktis P_0 lokaalset ekstreemumi ei ole.

Tõestus. Piirdume esimese väite tõestusega. Kasutame kahe muutuja funktsiooni Taylori valemit (6.35) tähistades selles $a = x_0$, $b = y_0$, $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, millest $x = x_0 + \Delta x$ ja $y = y_0 + \Delta y$. Eelduse kohaselt on P_0 kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ statsionaarne punkt, seega

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

ja

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

ning valemist (6.35) kasutusele võetud tähistusi arvestades

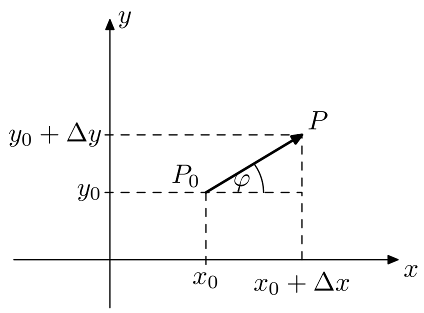
$$f(x_0{+}\Delta x, y_0{+}\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left[A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2\right] + \alpha_0(\Delta\varrho)^3$$

kus endiselt $\Delta\varrho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Teisendame viimast võrdust

$$f(x_0{+}\Delta x, y_0{+}\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{(\Delta\varrho)^2}{2!}\left[A\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta\varrho)^2} + 2B\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta\varrho)^2} + C\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta\varrho)^2} + \alpha_0\Delta\varrho\right] \tag{6.37}$$

Siin $P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ suvaline punkt $P_0(x_0, y_0)$ ümbrusest. Tähistame vektori $\overrightarrow{P_0P}$ ja x-telje positiivse suuna vahelise nurga φ-ga (joonis 6.13). Sellisel juhul $\cos\varphi = \dfrac{\Delta x}{\Delta\varrho}$ ja $\sin\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta\varrho}$ ehk $\Delta x = \Delta\varrho\cos\varphi$ ja $\Delta y = \Delta\varrho\sin\varphi$.



Joonis 6.13.

Asendades need võrdusesse (6.37) saame

$$f(x_0{+}\Delta x, y_0{+}\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{(\Delta\varrho)^2}{2!}\left[A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi + \alpha_0\Delta\varrho\right]$$

Korrutades ja jagades nukrsulgudes esimest kolme liiget suurusega A

$$f(x_0{+}\Delta x, y_0{+}\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{(\Delta\varrho)^2}{2!}\left[\frac{A^2\cos^2\varphi + 2AB\cos\varphi\sin\varphi + AC\sin^2\varphi}{A} + \alpha_0\Delta\varrho\right]$$

Kui nurksulgudes tekkinud murru lugejale liita $B^2 \sin^2 \varphi - B^2 \sin^2 \varphi$, siis

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0) = \frac{(\Delta\varrho)^2}{2!}\left[\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC-B^2)\sin^2\varphi}{A} + \alpha_0\Delta\varrho\right]$$

Et $A\cos\varphi + B\sin\varphi$ ja $\sin\varphi$ ei saa korraga võrduda nulliga, siis eelduse $AC - B^2 > 0$ tõttu on lugejas positiivne avaldis ja murd eelduse $A < 0$ tõttu negatiivne. Küllalt väikste Δx ja Δy, st küllalt väikese $\Delta\varrho$ korral on kogu nurksulgudes olev avaldis negatiivne, järelikult

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0$$

ehk

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0)$$

mis tõestabki, et funktsioonil $f(x, y)$ on punktis $P_0 = (x_0; y_0)$ lokaalne maksimum.

Märkus Kui $AC - B^2 = 0$, siis kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi kindlakstegemisel on vaja täiendavaid vahendeid. Teoreem 2 jätab sellisel juhul küsimuse lahtiseks.

Näites 1 vaadeldud funktsiooni $z = x^2 + y^2$ statsionaarse punkti $P_0(0; 0)$ saame võrrandisüsteemi (6.36)

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

lahendina. Leiame

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

ja

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Seega $AC - B^2 = 4 > 0$ ja $A > 0$. Järelikult on teoreemi 2 põhjal kahe muutuja funktsioonil $z = x^2 + y^2$ statsionaarses punktis $P_0(0; 0)$ lokaalne miinimum.

Näites 2 vaadeldud funktsiooni $z = x^2 - y^2$ statsionaarse punkti $P_0(0; 0)$ saame võrrandisüsteemi (6.36)

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

lahendina. Leiame

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

ja

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Seega $AC - B^2 = -4 < 0$. Järelikult teoreemi 2 põhjal kahe muutuja funktsioonil $z = x^2 - y^2$ statsionaarses punktis $P_0(0;0)$ lokaalset ekstreemumi ei ole.

6.15 Kahe muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid

Globaalseteks ekstreemumiteks nimetatakse kahe muutuja funktsiooni suurimat ja vähimat väärtust antud piirkonnas.

Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ pidev tõkestatud kinnises piirkonnas D. Toetume kahele omadusele.

Omadus 1. Tõkestatud kinnises piirkonnas D pidev kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ omab suurimat ja vähimat väärtust selles piirkonnas.

Omadus 2. Tõkestatud kinnises piirkonnas D pidev kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ omandab suurima ja vähima väärtuse kas kriitilises punktis või piirkonna D rajajoonel.

Need omadused annavad ühtlasi eeskirja, kuidas leida kahe muutuja funktsiooni suurimat ja vähimat väärtust tõkestatud kinnises piirkonnas.

1. Leiame piirkonda D kuuluvad kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ kriitilised punktid $P_1,\ P_2,\ \ldots$ ja arvutame funktsiooni väärtused nendes punktides $f(P_1),\ f(P_2),\ \ldots$

2. Leiame kahe muutuja funktsiooni suurima ja vähima väärtuse piirkonna D rajajoonel või selle erinevatel osadel.

3. Kõikide leitud väärtuste hulgast valime suurima ja vähima.

Näide. Leiame funktsiooni $z = x^2 + 2xy - 4x - 2y$ suurima ja vähima väärtuse kolmnurgas, mis on piiratud sirgetega $x = 0$, $y = 0$ ja $x + y = 4$.

Leiame kriitilised punktid. Osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2$.

Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

lahendina saame ühe kriitilise punkti $P_0(1;1)$ ja see kuulub vaadeldavasse piirkonda. Funktsiooni väärtus selles punktis $f(1;1) = -3$.

Piirkonna rajajoon koosneb kolmest osast. Esimese osa võrrand on $x = 0$ ja $0 \leq y \leq 4$. Sellel rajaosal tuleb leida ühe muutuja funktsiooni $z = -2y$ suurim ja vähim väärtus lõigul $[0;4]$. Kriitilisi punkte ei ole, sest $z' = -2$. Funktsiooni väärtused lõigu otspunktides on $z(0) = 0$ ja $z(4) = -8$.

Teise rajaosa võrrand on $y = 0$ ja $0 \leq x \leq 4$. Sellel rajaosal tuleb leida ühe muutuja funktsiooni $z = x^2 - 4x$ surim ja vähim väärtusa lõigul $[0;4]$. Võrrandist $z' = 0$ ehk $2x - 4 = 0$ saame kriitilise punkti $x = 2$. See kuulub vaadeldavasse lõiku ja funktsiooni väärtus $z(2) = -4$. Funktsiooni väärtused lõigu otspunktides $z(0) = 0$ ja $z(4) = 0$.

Kolmanda rajaosa võrrand on $y = 4 - x$ ja $0 \le x \le 4$. Sellel rajaosal tuleb seega leida ühe muutja funktsiooni $z = -x^2 + 6x - 8$ suurim ja vähim väärtus lõigul $[0; 4]$. Võrrandist $z' = 0$ ehk $-2x+6 = 0$ saame kriitilise punkti $x = 3$. Funktsiooni väärtus selles $z(3) = 1$. Lõigu otspunktidele vastavad kaks kolmnurga tippu, milles funktsiooni väärtused on juba leitud ($z(0) = -8$ ja $z(4) = 0$).

Seega on funktsiooni vähim väärtus -8, selle saavutab funktsioon punktis $(0; 4)$. Suurim väärtus on 1 ja selle saavutb funktsioon punktis $(3; 1)$, st

$$z_{min} = z(0; 4) = -8$$
$$z_{max} = z(3; 1) = 1$$

6.16 Kahe muutuja funktsiooni tinglikud ekstreemumid

Kõigepealt vaatleme näidet, kuidas tekivad tingliku ekstreemumi ülesanded.

Näide. Plekitahvlist pindalaga $2a$ tuleb valmistada risttahukakujuline kinnine karp. Millised peavad olema selle karbi mõõtmed, mille korral ruumala oleks maksimaalne.

Tegemist on tüüpilise lisatingimusega ekstreemumülesandega. Olgu karbi mõõtmed x, y ja z. Siis tuleb leida ruumala $V = xyz$ maksimum, nii et olekas täidetud tingimus $2xy + 2xz + 2yz = 2a$

Selle näite juurde pöördume tagasi, kui on tehtud vastav teoreetiline ettevalmistus.

Olgu esiteks vaja leida kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumid lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$. Ekstremumpunkte tuleb leida ainult nende hulgast, mis rahuldavad seda võrrandit Viimane on ühe muutuja funktsiooni ilmutamata kujuks. Selle funktsiooni tuletis $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$.

Seega on z sisuliselt ühe muutuja x funktsioon. Täistuletise valemist (6.22) saame, et

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Asendades sellesse $\dfrac{dy}{dx}$, saame

$$\frac{dz}{dx} = f'_x + f'_y\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right).$$

Et ekstreemumpunktis $\dfrac{dz}{dx} = 0$, siis

$$f'_x = f'_y\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Eeldades, et $f'_y \neq 0$ saame lisatingimusega ekstreemumpunktide leidmiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{f'_x}{f'_y} = \dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \tag{6.38}$$

See võrrandisüsteem sobib kahe muutuja funktsiooni ekstreemumpunktide leidmiseks ühe lisatingimuse korral. Laiematel juhtudel, kui tuleb leida kolme või enam muutuja funktsiooni ekstreemumpunkte teatud lisatingimusel või lisatingimustel, on vaja üldisemat lahenduseeskirja.

Üldisemat lahenduseeskirja vaatleme kõigepealt endise probleemi püstituse korral, st tuleb leida kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,y)$ ekstreemumpunktid lisatingimusel $\varphi(x,y) = 0$.

Toome sisse nõndanimetatud Lagrange'i kordaja λ ja koostame Lagrange'i funktsiooni

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y).$$

Lisatingimusega ekstreemumpunktideks on selle kolme muutuja funktsiooni statsionaarsed punktid ehk võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \tag{6.39}$$

lahendid. Näitame, et viimane võrrandisüsteem on samaväärne võrrandisüsteemiga (6.38). Et $F'_\lambda = \varphi(x,y)$, on süsteemi viimaseks võrrandiks lisatingimus $\varphi(x,y) = 0$. Esimeseks võrrandiks on $f'_x + \lambda\varphi'_x = 0$ ja teiseks $f'_y + \lambda\varphi'_y = 0$. Nendest kahest võrrandist elimineerime λ. Esimesest $\lambda = -\dfrac{f'_x}{\varphi'_x}$ ja teisest $\lambda = -\dfrac{f'_y}{\varphi'_y}$. Nendest kahest võrrandist

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y},$$

mis langeb kokku võrrandisüsteemi (6.38) esimese võrrandiga.

Kui on vaja leida kolme muutuja funktsiooni $w = f(x,y,z)$ ekstreemumid lisatingimusel $\varphi(x,y,z) = 0$, koostame Lagrange'i funktsiooni

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$$

ja ekstreemumpunktid leiame võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \tag{6.40}$$

Selle abil lahendame punkti alguses toodud näite, st leiame funktsiooni $V = xyz$ ekstreemumid lisatingimusel $xy + xz + yz = a$. Koostame Lagramge'i funktsiooni

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - a)$$

ja võrrandisüsteemi (6.40)

$$\begin{cases} yz + \lambda(y+z) = 0 \\ xz + \lambda(x+z) = 0 \\ xy + \lambda(x+y) = 0 \\ xy + xz + yz - a = 0 \end{cases} \tag{6.41}$$

Esimesest võrrandist $\lambda = -\dfrac{yz}{y+z}$, teisest $\lambda = -\dfrac{xz}{x+z}$ ja kolmandast $\lambda = -\dfrac{xy}{x+y}$. Saadud võrranditest esimene ja teine annavad võrrandi

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z}$$

ning esimene ja kolmas võrrandi

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{xy}{x+y}.$$

Nendest võrranditest esimese jagame z-ga ja teise y-ga. Kumbki muutujatest ei saa olla 0, sest karbi ruumala võrduks vastasel korral 0-ga.

Esimesest võrrandist saame $y(x+z) = x(y+z)$, millest $xy+yz = xy+xz$ ehk $yz = xz$, st $y = x$. Teisest võrrandist $z(x+y) = x(y+z)$, millest $xz + yz = xy + xz$ ehk $yz = xy$, st $z = x$. Järelikult $z = y = x$, st karbi mõõtmed on võrdsed ja karp peab olema kuubikujuline. Asendades saadud tulemused süsteemi (6.41) viimasesse võrrandisse, saame $x^2 + x^2 + x^2 = a$, millest $x = \sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

Järelikult, kui materjali hulk on $2a$ pindalaühikut, tuleb maksimaalse ruumalaga karbi tegemiseks valida selle mõõtmed $x = y = z = \sqrt{\dfrac{a}{3}}$ ja maksimaalne ruumala $V_{max} = \dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

Kui tuleb leida kolme muutuja funktsiooni $w = f(x,y,z)$ ekstreemumid lisatingimustel $\varphi(x,y,z) = 0$ ja $\psi(x,y,z) = 0$, koostame Lagrange'i funktsiooni

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$$

ja ekstreemumpunktid leiame võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ F'_\lambda = 0 \\ F'_\mu = 0 \end{cases} \tag{6.42}$$

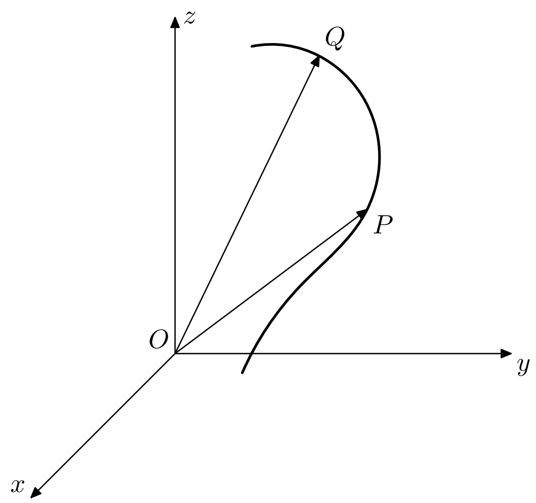
6.17 Ruumilise joone puutuja

Olgu ruumiline joon antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{6.43}$$

Fikseerides parameetri väärtuse t, saame ruumilise joone fikseeritud punkti $P(x(t); y(t); z(t))$. Eeldame, et parameetri t funktsioonid (6.43) on diferentseeruvad punktis P.

Kui muuta parameetri väärtust mingi suuruse Δt võrra, siis on selle väärtus $t+\Delta t$ ja sellele vastaku joone punkt Q koordinaatidega $x = x(t+\Delta t)$, $y = y(t + \Delta t)$ ja $z = z(t + \Delta t)$.



Joonis 6.14. Ruumiline joon ja selle puutuja

Vektor $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ on lõikaja PQ suunaline ja selle koordinaadid on $\overrightarrow{PQ} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, kus

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t) \\ \Delta y &= y(t + \Delta t) - y(t) \\ \Delta z &= z(t + \Delta t) - z(t) \end{aligned}$$

Kui korrutada vektorit skalaariga, saame vektori sihilise vektori, st $\overrightarrow{PQ}$ sihiline on vektor $\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$.

Piirprotsessis $\Delta t \to 0$ on vektori $\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ}$ koordinaatide piirväärtused funktsioonide (6.43) tuletised parameetri järgi, sest eeldasime funktsioonide diferentseeruvust punktis P, st

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\dot{x}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\dot{y}$$

ja

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\dot{z}$$

Tähistades $\dot{\mathbf{r}}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$, saame

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ}=\dot{\mathbf{r}}$$

Kuid diferentseeruvusest punktis P järeldub pidevus selles punktis. Seega

$$\lim_{\Delta t\to 0}x(t+\Delta t)=x(t)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}y(t+\Delta t)=y(t)$$

ja

$$\lim_{\Delta t\to 0}z(t+\Delta t)=z(t)$$

st punkt Q läheneb mööda joont punktile P ja lõikajasihiline vektor $\overrightarrow{PQ}$ läheneb joonele punktis P tõmmatud puutuja sihilisele vektorile. Aga $\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ}$ on alati $\overrightarrow{PQ}$ sihiline, sõltumata sellest, kui lähedal on punkt Q punktile P. Seega

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ}$$

on puutuja sihiline vektor ehk kasutades sissetoodud tähistust on joonele punktis P tõmmatud puutuja sihivektor

$$\dot{\mathbf{r}}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

Punktis P on parameetri t väärtus fikseeritud, seega $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ on fikseeritud punkti koordinaadid ja joonele punktis P tõmmatud puutuja kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x-x(t)}{\dot{x}}=\frac{y-y(t)}{\dot{y}}=\frac{z-z(t)}{\dot{z}} \tag{6.44}$$

Näide. Koostame kruvijoone $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ puutuja kanoonilised võrrandid punktis, kus parameeter $t=\frac{\pi}{3}$.

Kõigepealt leiame punkti koordinaadid $x\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a}{2}$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ja $z\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{b\pi}{3}$.

Seejärel leiame $\dot{x} = -a \sin t$, $\dot{y} = a \cos t$ ja $\dot{z} = b$. Järelikult vaadeldavas punktis kruvijoonele tõmmatud puutuja sihivektor on

$$\dot{r} = \left(-a \sin \frac{\pi}{3}, a \cos \frac{\pi}{3}, b\right) = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, b\right)$$

ning (6.44) järgi on puutuja kanoonilised võrrandid

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z - \frac{b\pi}{3}}{b}$$

ehk

$$\frac{2x - a}{-a\sqrt{3}} = \frac{2y - a\sqrt{3}}{a} = \frac{3z - b\pi}{3b}$$

6.18 Pinna puutujatasand ja normaal

Kahe muutuja funktsiooni graafik on mingi pind ruumis. Käesolevas punktis olgu kahe muutuja funktsioon antud ilmutamata kujul

$$F(x, y, z) = 0$$

Teiselt poolt vaadatuna on tegemist pinna võrrandiga. Fikseerime pinnal punkti $P(x, y, z)$.

Definitsioon 1. Pinna punkti P nimetatakse *harilikuks* ehk *regulaarseks* punktiks, kui selles kõik kolm osatuletist $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial F}{\partial z}$ eksisteerivad ja vähemalt üks neist erineb nullist. Pinna *iseäraseks* punktiks nimetatakse punkti, kus kõik kolm osatuletist on korraga nullid või vähemalt ühte neist ei eksisteeri.

Punkti P läbib lõpmatult palju jooni, mis asuvad sellel pinnal.

Definitsioon 2. Pinna puutujaks punktis P nimetatakse suvalist pinnal asuvat ja punkti P läbiva joone puutujat.

Teoreem. Kui P on pinna harilik punkt, siis kõik selle pinna puutujad asuvad ühel ja samal tasandil.

Tõestus. Valime pinnal suvalise punti P läbiva joone. Olgu selle parameetrilised võrrandid on $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$. Et joon asub pinnal, siis asub pinnal iga selle joone punkt ning asendades joone parameetrilised võrrandid pinna võrrandisse, saame samasuse

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$$

Diferentseerime samasuse mõlemat poolt parameetri järgi, kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit. Saame, et

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

ehk

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z} = 0$$

Vasak pool on kahe vektori

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

ja

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

skalaarkorrutis. Vektor $\dot{\mathbf{r}}$ on punkti P läbiva joone puutuja sihiline. Et

$$\overrightarrow{n} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$$

siis arvestades asjaolu, et meil oli valitud suvaline punkti P läbiv joon, on iga punkti P läbiva joone puutuja risti ühe ja sama vektoriga $\overrightarrow{n}$, st kõik punkti P läbivad pinna puutujad on risti ühe ja sama vektoriga, seega asuvad samal tasandil.

Definitsioon 3. Tasandit, millel asuvad punkti P läbivad pinna puutujad, nimetatakse pinna *puutujatasandiks* punktis P. Vektorit

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

nimetetakse pinna *normaalvektoriks.*

Tähistame pinnal fikseeritud punkti $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Eeldades, et P_0 on pinna harilik punkt, saame leida osatuletiste väärtused selles punktis, st normaalvektori $\overrightarrow{n}$. Kui $P(x, y, z)$ on puutujatasandi suvaline punkt, siis $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$. Vektori $\overrightarrow{P_0P}$ koordinaadid on $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ja puutujatasandi võrrand on seega

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \tag{6.45}$$

Näide 1. Koostame sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ puutujatasandi võrrandi punktis $P_0(1; 1; 1)$.

Sfääri võrrandist $x^2+y^2+z^2-3 = 0$ näeme, et $F(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-3$. Seega

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

ja punktis $P_0(1; 1; 1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2$$

Järelikult on normaalvektor $\overrightarrow{n} = (2; 2; 2)$ ja puutujatasandi võrrand (6.45)

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

ehk pärast 2-ga jagamist ja sulgude avamist

$$x + y + z = 3$$

Iseärases punktis ei pruugi pinna puutujatasandit eksisteerida. Iseäraseks punktiks on näiteks koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ tipp $O(0;0;0)$, sest antud juhul

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z$$

ja puntkis O $\overrightarrow{n} = (0;0;0)$ ning üheselt määratud puutujatasandit ei eksisteeri.

Kui pinna võrrand on ilmutatud kujul $z = f(x,y)$ ehk $z - f(x,y) = 0$, siis

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

ning puutujatasandi võrrand (6.45) on

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

ehk

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \tag{6.46}$$

Kui puutujatasandi võrrandis (6.46) tähistada $x - x_0 = \Delta x$ ja $y - y_0 = \Delta y$, siis

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

ja võrduse parem pool on funktsiooni $z = f(x,y)$ täisdiferentsiaal punktis P_0.

Siit järeldub kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali geomeetriline tähedus. Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaal punktis P_0 võrdub kahe muutuja graafikuks oleva pinna puutujatasandi aplikaadi muuduga, kui x muutub Δx ja y muutub Δy võrra.

Definitsioon 4. Pinna *normaaliks* punktis P_0 nimetatakse selles punktis puutujatasandile tõmmatud ristsirget.

Normaali sihivektoriks on pinna normaalvektor. Tähistades punkti P_0 koordinaadid taas $P_0(x_0, y_0, z_0)$, saame normaali kanoonilised võrrandid

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{6.47}$$

kui nimetajates on osatuletiste väärtused punktis P_0.

Näide 2. Koostame sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ normaali kanoonilised võrrandid punktis $P_0(1;1;1)$.

Näites 1 leitud andmete põhjal saame kirjutada

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

ehk

$$x = y = z$$